

1 Twierdzenie Fubiniiego

Twierdzenie Fubiniiego. Jeśli $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

Uwaga 1. Ta sama równość zachodzi z odwrotną kolejnością całkowania, i w ogóle z dowolnym rozbiem $z \in \mathbb{R}^{n+m}$ na dwie zmienne.

Uwaga 2. Całkowalność funkcji

$$\begin{aligned} y &\mapsto f(x, y) \quad (\text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n), \\ x &\mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, d\lambda_m(y) \end{aligned}$$

jest częścią tezy twierdzenia.

Uwaga 3. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 1.1. (zasada Cavalieriego) Dla nieujemnej funkcji mierzalnej $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) \, dt.$$

Wskazówka. Obliczyć całkę z indykatora zbioru $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t < f(x)\}$.

Zadanie 1.2. Dla funkcji mierzalnej $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $p \geq 1$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, d\lambda_n(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) \, dt.$$

Zadanie 1.3. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = |x|^\alpha$ jest całkowalna

- na kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n ?
- na dopełnieniu kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n ?

Wskazówka. Dla $n = 1$ odpowiedź brzmi odpowiednio: $\alpha > -1$, $\alpha < -1$.

Zadanie 1.4. Obliczyć pole koła o promieniu r , czyli

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 < r\}} \, d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.5. Dla funkcji całkowalnej f wyprowadzić równość

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) \, dy \, dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2.$$

Zadanie 1.6. Wykazać, że $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Wskazówka. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, d\lambda_2(x, y)$, korzystając z twierdzenia Fubiniego i zasady Cavalieriego.

Zadanie 1.7. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem dodatniej miary λ_n . Pokazać, że rzut ortogonalny na dowolną k -wymiarową podprzestrzeń liniową \mathbb{R}^n ma dodatnią miarę λ_k .

Zadanie 1.8. Obliczyć całkę

$$\int_{[-1,1]^2} (1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3) \, d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.9. Dany jest wielomian $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o współczynnikach z przedziału $[-1, 1]$. Wykazać, że

$$\int_{[-1,1]^2} p(xy) \, d\lambda_2(x, y) \leq 8.$$

Czy stałą 8 można poprawić?

Zadanie 1.10. Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \, d\lambda_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Wskazówka. Wykorzystać rozwinięcie funkcji $\frac{1}{1-t}$.

Uwaga. Można się przekonać (Zadanie 3.2), że lewa strona jest równa $\frac{\pi^2}{6}$.

Zadanie 1.11. Niech $0 < a < b$. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Wskazówka. (sposób I) Zapisać różnicę $e^{-ax} - e^{-bx} = e^{-tx}|_{t=b}^{t=a}$ jako całkę z pochodnej.

Wskazówka. (sposób II) Całkę po przedziale $[\varepsilon, \infty)$ sprowadzić przez podstawienie do całki $[a, b]$, a następnie przejść do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Zadanie 1.12. Obliczyć całkę $\int_A f d\lambda_2$, gdzie

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x\}$, $f(x, y) = (1 - x + y)e^{-x}$;
 (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x, x^2 y \leq 16\}$, $f(x, y) = 1$;
 (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$, $f(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{y}}$;
 (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$, $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Uwaga. Nie w każdym przypadku jest oczywiste, że założenia twierdzenia Fubiniiego są spełnione.

Zadanie 1.13. (a) Niech A będzie zwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 ograniczonym przez parabolę $y = x^2$ i prostą $x + y = 2$. Obliczyć

$$\int_A 6x + 2y^2 d\lambda_2(x, y).$$

(b) Niech B będzie zwartym podzbiorem \mathbb{R}^2 ograniczonym krzywymi $y = x^2$ i $y = x^3$. Obliczyć

$$\int_B xy^2 d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 1.14. Obliczyć całki

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x} dy dx, \\ & \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy, \\ & \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx, \\ & \int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy. \end{aligned}$$

Zadanie 1.15. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch (nie-kończonych) walców o promieniu 1 i prostopadle przecinających się osiach.

Zadanie 1.16. Uzasadnić, że funkcja $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowna w $[0, 1]^2$.

Zadanie 1.17. Niech $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi o zwartym nośniku. Wyprowadzić wzór na całkowanie przez części:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wynioskować równości

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Delta f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 f(x)|^2 dx,$$

w których Δ oznacza operator Laplace'a: $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Zadanie 1.18. Noga grzyba ma kształt walca (o średnicy 1 i wysokości 2), a na niej leży symetrycznie kapelusz grzyba, będący półkulą (o promieniu R). Przy założeniu, że grzyb jest bryłą jednorodną, a jego środek leży na styku nogi i kapelusza, znaleźć promień R .

Zadanie 1.19. Obliczyć całkę

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x)$$

na dwa sposoby i wynioskować wzór na miarę kuli jednostkowej:

$$\lambda_n(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

gdzie $\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} dx$ jest funkcją gamma Eulera.

Wskazówka. Zadanie 1.6.

2 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie o zamianie zmiennych. Jeśli $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ jest dyfeomorfizmem dwóch zbiorów otwartych $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, a $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int_{\Omega'} f \, d\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| \, d\lambda_n$$

Uwaga 1. Całkowalność funkcji $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ jest częścią tezy twierdzenia.

Uwaga 2. Analogiczne twierdzenie zachodzi, gdy f jest nieujemną funkcją mierzalną.

Zadanie 2.1. Obliczyć całkę

$$\int_D x^2 + y^2 \, d\lambda_3(x, y, z), \quad \text{gdzie } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Zadanie 2.2. Obliczyć średnią odległość punktu trójwymiarowej kuli jednostkowej do jej środka.

Zadanie 2.3. Obliczyć objętość figury powstałej w wyniku figury pod wykresem funkcji $y = x^2$, $x \in [1, 2]$, wokół osi x .

Zadanie 2.4. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie figurą pod wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ na przedziale $x \in [1, \infty)$, a B bryłą obrotową powstałą przez obrót A wokół osi x . Wykazać, że $\lambda_2(A) = \infty$, ale $\lambda_3(B) < \infty$.

Zadanie 2.5. Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem o dodatniej i skończonej mierze Lebesgue'a, a $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizmem liniowym. Przekonać się, że L przeprowadza środek ciężkości E na środek ciężkości $L(E)$.

Trudniejsza wersja. To samo pozostaje prawdą, gdy $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest epimorfizmem liniowym.

Zadanie 2.6. Rozważmy zbiór $A = (0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2})$ oraz przekształcenie $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad \left(= (u, v) \right).$$

Uzasadnić, że Φ jest dyfeomorfizmem na swój obraz, opisać ów obraz, a następnie dokonać zamiany zmiennych $(x, y) \mapsto (u, v)$ w całce

$$\int_A \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x} \cos^2 y \sin^2 y} \, d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 2.7. Uzasadnić, że przekształcenie $\Phi: (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \left(= (u, v) \right).$$

jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Opisać obraz Φ oraz dokonać zamiany zmiennych $(x, y) \mapsto (u, v)$ w całce

$$\int_{[0,1]^2} \sqrt[3]{x^4 - 6x^2y^2 + y^4} \, d\lambda_2(x, y).$$

Zadanie 2.8. Dana jest krzywa bez samoprzebieć $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^2 , parametryzowana długością łuku. Oznaczmy wektor normalny $N(t) = (-\dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_1(t))$ i rozważmy obszar

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot N(t) : t \in (a, b), |s| < r\}.$$

Wyznaczyć pole obszaru Γ_r . Jak ma się on do długości krzywej γ ?

Wyjaśnienie założeń. Bez samoprzebieć oznacza, że γ jest funkcją różnowartościową. Przez krzywą klasy C^2 rozumiemy, że pochodne $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ istnieją oraz są ograniczone. Parametryzacja długością łuku to inne określenie na warunek $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ dla wszystkich t .

Zadanie 2.9. Oblicz pole obszaru płaszczyzny ograniczonego od wewnątrz okręgiem jednostkowym, zaś od zewnątrz krzywą opisaną we współrzędnych biegunowych równaniem $r = 2 + \cos \phi$.

Zadanie 2.10. Wyznaczyć całkę

$$\int_D (x^2 + y^2) \, d\lambda_2(x, y), \quad \text{gdzie } D = \{1 < x^2 - y^2 < 2, 2 < xy < 4, x, y \geq 0\}.$$

Zadanie 2.11. (fakt pomocny w pracy domowej) Niech A będzie macierzą kwadratową, a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją zadaną wzorem $f(t) = \det(I + tA)$. Wyprowadzić równość $f'(0) = \text{tr } A$.

Trudniejsza wersja. Wyprowadzić wzór na $f'(0)$ dla funkcji $f(t) = \det(B + tA)$, gdzie B jest macierzą odwracalną.

3 Praca domowa – całkowanie

Errata (2023-03-16). Dodane wyjaśnienie ws. zwartego nośnika funkcji.

Zasady rozwiązywania. Poniższe cztery zadania należy samodzielnie rozwiązać, a następnie złożyć poprzez stronę kursu na Moodle. Preferowana forma to dokument zredagowany elektronicznie, dopuszczalny jest też skan odręcznych rozwiązań pod warunkiem czytelności pisma oraz skanu. Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia. Można też korzystać z tezy poprzednich podpunktów zadania, nawet jeśli się ich nie rozwiązało.

Dodatkowe źródła. Do dwóch zadań sam podaję odnośniki, rozwiązania dwóch pozostałych też da się znaleźć w Internecie. Zachęcam do samodzielnego zmierzania się z problemami, ale nie ograniczam korzystania z dodatkowych źródeł. Z jednym zastrzeżeniem – zredagowane rozwiązanie musi być kompletne, bez powoływania się na źródła inne niż wykład i ćwiczenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do czwartku 23 marca** (do północy).

Zadanie 3.1. (10p) Wyznaczyć wartość całki iterowanej

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy$$

poprzez podstawienie $x = yt$ w wewnętrznej całce i zastosowanie twierdzenia Fubniego.

Uwaga. Wartość całki jest Państwu skądinąd znana. W tym zadaniu proszę o dojście do tej wartości zgodnie ze wskazaną strategią.

Zadanie 3.2. (10p) Wykazać, że

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} d\lambda_2(x, y) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wskazówka. Obrócić o 45° , czyli zastosować podstawienie $x = u + v$, $y = u - v$.

Uwaga. Wraz z Zadaniem 1.10 daje to rozwiązanie problemu bazylejskiego: $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, pochodzące od Toma Apostola (*A proof that Euler missed: evaluating $\zeta(2)$ the easy way*, The Mathematical Intelligencer, 1983; zob. również [link](#)).

Zadanie 3.3. Niech $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkwalną, a $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkcją gładką o zwartym nośniku (tzn. zerującą się poza pewną kulą).

(a) (3p) Uzasadnić, że przekształcenie

$$\Phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi_t(x) = x + t \cdot \varphi(x)$$

jest dyfeomorfizmem dla t z pewnego przedziału $(-t_0, t_0)$. Wyznaczyć pochodną $\det D\Phi_t(x)$ względem t w punkcie $t = 0$.

(b) (7p) Wykazać, że pochodną funkcji

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \int_{\mathbb{R}^n} F(x + t \cdot \varphi(x)) \, dx$$

w punkcie $t = 0$ jest

$$f'(0) = - \int_{\mathbb{R}^n} F(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \right)}_{\text{ozn. } \operatorname{div} \varphi(x)} \, dx.$$

Wskazówka. Można przyjąć wzór $\det(I + tA) = 1 + t \cdot \operatorname{tr} A + o(t)$ za znany.

Uwaga. W punkcie (b) można otrzymać 6p, jeśli uzasadni się tę równość przy założeniu $F \in C^1$.

Zadanie 3.4. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym, którego brzeg $\partial\Omega$ jest obrazem 1-okresowej funkcji $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^2 . Załóżmy ponadto, że $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ oraz że krzywizna $\kappa(t) := |\ddot{\gamma}(t)|$ jest dodatnia dla każdego t .

(a) (1p) Wyprowadzić równość $\kappa(t) = |\ddot{\gamma}_1(t)\dot{\gamma}_2(t) - \dot{\gamma}_1(t)\ddot{\gamma}_2(t)|$.

(b) (1p) Uzasadnić, że $\int_0^1 \kappa(t) \, dt = 2\pi$.

(c) (8p) Dla zadanego (można przyjąć, że odpowiednio małego) $r > 0$ wyznaczyć pole obszaru

$$\Gamma_r = \{\gamma(t) + s \cdot \dot{\gamma}(t) : t \in [0, 1], s \in [0, r]\}.$$

Wskazówka. W punkcie (a) zróżniczkować warunek $|\dot{\gamma}(t)|^2 \equiv 1$, by wyprowadzić prostopadłość $\ddot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$.

Wskazówka. W punkcie (b) rozważyć pochodną kąta $\alpha(t) := \arctan(\dot{\gamma}_1(t)/\dot{\gamma}_2(t))$. Można przyjąć za znany fakt, że wektor jednostkowy $\dot{\gamma}(t)$ na przedziale $t \in [0, 1]$ dokonuje obrotu o 2π .

Uwaga. Gdyby na rowerze o długości r zrobić okrążenie po wypukłym torze, to Γ_r jest dokładnie obszarem między śladami tylnego i przedniego koła ($\partial\Omega$ pełni tu rolę śladu tylnego koła). Więcej szczegółów można znaleźć w artykule *Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old Conjecture*, The American Mathematical Monthly, 2013 ([link](#)).

4 Sploty

Splot funkcji $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

Splot ciągów $a, b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$(a * b)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k$$

Zadanie 4.1. Dane są dwie niezależne ograniczone zmienne losowe A, B o wartościach w liczbach naturalnych. Oznaczmy $a_k := \mathbb{P}(A = k)$, $b_k := \mathbb{P}(B = k)$ oraz $c_k := \mathbb{P}(A + B = k)$. Wykazać, że ciąg (c_k) jest splotem ciągów (a_k) i (b_k) , to znaczy

$$c_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{k-i} b_i.$$

Przekonać się również, że wielomian $\sum c_k x^k$ jest iloczynem wielomianów $\sum a_k x^k$ i $\sum b_k x^k$.

Zadanie 4.2. (kostki Sichermana) Niech A, B będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednostajnym rozkładzie na $\{1, \dots, 6\}$ (odpowiada to dwóm rzutom kostką). Znaleźć niezależne zmienne A', B' o innym rozkładzie na liczbach naturalnych, ale dające ten sam rozkład sumy $A' + B'$ co $A + B$.

Zadanie 4.3. Całki niewłaściwe

$$B_k := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \dots \frac{\sin(x/(2k+1))}{x/(2k+1)} dx$$

są równe π dla $k = 0, 1, \dots, 6$. Ale dla $k = 7$ dostajemy

$$B_7 = \frac{467'807'924'713'440'738'696'537'864'469}{467'807'924'720'320'453'655'260'875'000} \pi = \pi - 0, \underbrace{0000000000}_{10 \text{ zer}} 462 \dots$$

Sprawdzić, że podobny fenomen zachodzi przy splataniu funkcji $f_d := \frac{1}{d} \mathbb{1}_{(-d/2, d/2)}$. Otóż liczby

$$C_k := f_1 * f_{1/3} \dots * f_{1/(2k+1)}(0)$$

są równe 1 dla $k = 0, 1, \dots, 6$, ale dla $k = 7$ jest już mniej.

Uwaga. Polecam filmy na kanale Youtube 3Blue1Brown: [Researchers thought this was a bug \(Borwein integrals\)](#) oraz [But what is a convolution?](#).

Zadanie 4.4. Pokazać, że dla dowolnego $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto f(\cdot - v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją ciągłą.

Wskazówka. Warto skorzystać z faktu, że funkcje ciągłe o zwartym nośniku są gęste w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 4.5. Wskazać ciąg funkcji $f_n \in L^1([0, 1])$ spełniający $\|f_n\|_{L^1} \leq 1$, który nie posiada podciągu zbieżnego w $L^1([0, 1])$.

Zadanie 4.6. Niech $f \in L^1(\Omega, \mu)$. Wykazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f(x)| \, d\mu(x) < \varepsilon.$$

Zadanie 4.7. Znaleźć przykład funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dla których całka definiująca $f * g(0)$ nie jest zbieżna.

Zadanie 4.8. Wykazać, że przestrzeń $L^1(\mathbb{R}^n)$ z działaniem splotu nie posiada jedynki: nie istnieje funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, spełniająca $f * g = g$ dla wszystkich $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zadanie 4.9. Jeśli $p, q, r \geq 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, to

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Zadanie 4.10. Dla $a, b > 0$ przyjmijmy $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, dx$ oraz $B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \, dx$. Wyprowadzić tożsamość

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Wskazówka. Wykorzystać splot funkcji $f_c(x) = x^{c-1} e^{-x} \mathbb{1}_{x>0}$ dla $c = a, b$.

Zadanie 4.11. Wykazać, że jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Zadanie 4.12. Dla $t > 0$ określamy tak zwane jądro ciepła $g_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $g_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ (gęstość rozkładu normalnego o wariancji 2), następnie dla $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiujemy $H_t f := f * g_t$. Wykazać, że

- (a) funkcja g_t spełnia równanie ciepła $\partial_t g = \Delta g$ (gdzie $\Delta = \partial_{11} + \dots + \partial_{nn}$);
- (b) funkcja $H_t f(x)$ (zmiennych t, x) jest gładka na $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ i również spełnia $\partial_t f = \Delta f$;
- (c) $\|H_t f - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$;
- (d) $H_t H_s f = H_{t+s} f$.

Wskazówka. W ostatnim punkcie warto najpierw wyprowadzić wzór

$$\partial_t (H_{r-t} f_t(x)) = (H_{r-t} (\partial_t f_t - \Delta f_t))(x)$$

(w którym f_t jest gładką funkcją dwóch zmiennych t, x).

5 Transformata Fouriera

Definicja, podstawowe własności.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) \, dx \\ (i\partial)^\alpha \hat{f}(\xi) &= \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) & (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) &= \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) \\ \mathcal{F}(f \circ L) &= \frac{1}{|\det L|} \hat{f} \circ L^{-1} & \mathcal{F}(f(\cdot - y)) &= e^{-i\langle y, \xi \rangle} \hat{f}\end{aligned}$$

Zadanie 5.1. Wykazać, że $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Zadanie 5.2. Wyznaczyć transformatę Fouriera następujących funkcji:

(a) $f_d := \frac{1}{d} \mathbb{1}_{(-d/2, d/2)}$ ($d > 0$)

(b) $g(x) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 1 & t \in (-1, 0) \\ -1 & t \in (0, 1) \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$

(d) $k(x) = e^{-|x|}$

Zadanie 5.3. Wykazać, że funkcja $g = \mathcal{F}(e^{-x^2})$ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$g'(\xi) = -\frac{\xi}{2} g(\xi), \quad g(0) = \sqrt{\pi}.$$

Wynioskować, że dla każdego $a > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} e^{-a|x|^2} \, dx = (\pi/a)^{d/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Zadanie 5.4. Dla funkcji Schwartza $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ wykazać tożsamość

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} e^{-\varepsilon|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \, d\xi = (4\pi\varepsilon)^{-d/2} \left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4\varepsilon}} * f \right) (x).$$

Wywnioskować, że

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \, d\xi.$$

Zadanie 5.5. Oznaczmy $\check{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$. Sprawdzić, że $\overline{\mathcal{F}f} = \check{\mathcal{F}}\bar{f}$, $\overline{\check{\mathcal{F}}f} = \mathcal{F}\bar{f}$ oraz $\mathcal{F}\check{\mathcal{F}} = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^d \text{id}$.

Zadanie 5.6. Wyprowadzić tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} \quad \text{dla } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Wywnioskować twierdzenie Plancherela: $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

6 Podrozumności \mathbb{R}^n

Definicja. Podzbiór $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy m -wymiarową *podrozumnością* (inaczej: *rozumnością zanurzoną*), jeśli lokalnie wygląda jak fragment \mathbb{R}^m . Można przyjąć dowolną z poniższych definicji:

M jest lokalnie wykresem: $\forall p \in M \exists 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, U \subseteq \mathbb{R}^n, P := \text{span}(e_{i_j}), p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, P^\perp)$
 $M \cap V = \text{wykres } \varphi \cap V$

obrazem parametryzacji: $\forall p \in M \exists U \subseteq \mathbb{R}^m, p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V), \text{rank } D\varphi = m$
 $\varphi: U \rightarrow M \cap V$ jest homeomorfizmem

poziomicą submersji: $\forall p \in M \exists p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-m}), \text{rank } D\varphi = n-m$
 $M \cap V = \text{poziomica } \varphi$

jak $\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}$: $\forall p \in M \exists p \in V \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1(U, V)$ dyfeomorfizm
 $M \cap V = \text{obraz } \mathbb{R}^m \times \mathbf{0} \text{ przy } \varphi$

Zadanie 6.1. Dla promieni $0 < r < R$ wprowadźmy torus

$$T_{r,R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

otrzymany przez obrót okręgu $o((R, 0), r)$ w płaszczyźnie xz wokół osi z . Rozważmy też standardowy torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, czyli zbiór

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Uzasadnić, że jedno i drugie jest rozumnością. Sprawdzić, że

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto ((R + rx_1)x_3, (R + rx_1)x_4, rx_2)$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{T}^2 \rightarrow T_{r,R}$.

Zadanie 6.2. Czy zbiory

$$A = \{x^6 + y^5 + z^4 = 0\}, \quad B = \{x^6 + y^4 + z^3 = 0\}$$

w \mathbb{R}^3 są rozumnościami klasy C^1 ?

Zadanie 6.3. Pokazać, że zbiór

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, xy + yz + zx = 8\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

jest krzywą (tj. 1-wymiarową rozumnością) klasy C^1 . Czy jest to krzywa spójna?

Wskazówka. Może być pomocne rozważenie wielkości $(x + y + z)^2$.

Zadanie 6.4. Punkt P porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka od punktu $A = (0, 0, 0)$ do punktu $B = (1, 0, 0)$. Podobnie w tym samym czasie Q przemieszcza się z $C = (0, 1, 0)$ do $D = (0, 1, 1)$. Niech M będzie sumą wszystkich odcinków PQ (bez końców), łączących punkty P i Q w jednoczesnych położeniach. Znaleźć parametryzację M i uzasadnić, że jest to rozmiatość dwuwymiarowa w \mathbb{R}^3 .

Zadanie 6.5. Niech $f_\lambda(x, y) = x^3 + \lambda(x^2 - y^2)$ dla dowolnych $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_0(x, y) = c\}$ jest rozmiatością? Dla jakich c jest spójny?
- (b) Dla jakich $c \in \mathbb{R}$ zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = c\}$ jest rozmiatością? Dla jakich c jest spójny?

Zadanie 6.6. Pokazać, że zbiór macierzy ortogonalnych

$$O(n) = \{Q \in M_{n \times n} : Q^T Q = I\}$$

jest rozmiatością wymiaru $n(n-1)/2$. Opisać przestrzeń styczną do $O(n)$ w punkcie I .

Wskazówka. Funkcja $F(Q) = Q^T Q$ nie jest submersją jako funkcja $F: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, ale jako $F: M_{n \times n} \rightarrow \text{Sym}_{n \times n}$ już tak.

Zadanie 6.7. Niech $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ będzie standardową sferą oraz

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad F(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2).$$

Sprawdzić, że $F(\mathbb{S}^2)$ jest zwartą rozmiatością.

Uwaga. Jest to tzw. *plaszczyna rzutowa*. Można podać jej prostszy opis: jest to sfera \mathbb{S}^2 z utożsamionymi punktami antypodycznymi (czyli parami x i $-x$).

Zadanie 6.8. Niech funkcja $f: (-\infty, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (1, t) & \text{dla } t \leq 0, \\ (\cos t, \sin t) & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Przekonać się, że f jest różnowartościową funkcją klasy C^1 . Czy jej obraz jest jednowymiarową podrozmiatością w \mathbb{R}^2 ?

Zadanie 6.9. Uzasadnić następujące pomocnicze fakty z topologii:

- (a) Załóżmy, że A jest przestrzenią zwartą, B przestrzenią Hausdorffa, a $f: A \rightarrow B$ jest ciągłą bijekcją. Wówczas f jest homeomorfizmem.
- (b) Załóżmy, że A, B są jak wyżej, natomiast $f: A \rightarrow B$ jest funkcją ciągłą spełniającą na pewnym podziorze $A_0 \subseteq A$ warunek

$$f(x) = f(y) \implies x = y \text{ lub } x, y \notin A_0.$$

Wówczas obcięcie $f|_{A_0}$ jest homeomorfizmem pomiędzy A_0 i $f(A_0)$.

Uwaga. Jeśli to ułatwi rozwiązanie, to można przyjąć, że A, B są przestrzeniami metrycznymi.

Zadanie 6.10. Przekonać się, że przekształcenie

$$i: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

jest gładkim dyfeomorfizmem spełniającym $i^2 = \text{id}$. Sprawdzić, że zadaje ono bijekcję pomiędzy zbiorami

$$P = \{x : x_1 = 1\}, \quad S = \left\{x : \left|x - \frac{1}{2}e_1\right| = \frac{1}{2}\right\} \setminus \{0\},$$

a więc parametryzację sfery z wyjętym punktem

Zadanie 6.11. ★ Niech M będzie standardową wstęgą Möbiusa w \mathbb{R}^3 , np. opisana parametryzacją:

$$\begin{cases} x &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y &= \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\ z &= \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases} \quad (0 \leq u < 2\pi, -1 < v < 1)$$

Wykazać, że choć M jest rozmaitością, to nie da się przedstawić jako poziomicą submersji. Innymi słowy, nie istnieje zbiór otwarty $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcja $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 , dla której

$$M = F^{-1}(0), \quad \text{rank } dF(x) = 1 \quad \text{dla } x \in M.$$

7 Wyznacznik Grama

Zadanie 7.1. (o wyznaczniku Grama)

- (a) Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi z iloczynem skalarnym, tego samego wymiaru, a $L: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym. Zdefiniujemy $|\det L|$ jako

$$|\det L| := \left| \det \left([L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \right) \right|,$$

gdzie $[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą L w pewnych bazach ortonormalnych \mathcal{U}, \mathcal{V} przestrzeni U, V . Sprawdzić, że definicja nie zależy od wyboru baz.

- (b) Przekonać się, że nadal obowiązują wzory $|\det(L_1 L_2)| = |\det L_1| \cdot |\det L_2|$ oraz $|\det L^{\top}| = |\det L|$.
- (c) Przyjmijmy teraz, że $V \subseteq W$, przekształcenie $E: V \hookrightarrow W$ jest włożeniem (tzn. $E(v) = v$) oraz $M := EL$. Dowieść, że $\det(M^{\top} M) = |\det L|^2$.
- (d) Załóżmy, że różniczka pewnego przekształcenia $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma rząd n (maksymalny). Oznaczmy przez $\overline{Df}: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{im } Df$ tę samą różniczkę rozumianą jako przekształcenie w mniejszą podprzestrzeń. Wykazać, że

$$\text{wyznacznik Grama} = \sqrt{\det(Df^{\top} Df)} = |\det \overline{Df}|.$$

Uwaga. Jeśli rozważać przestrzenie liniowe z wybraną orientacją, to przez ograniczenie do baz dodatnio zorientowanych można zdefiniować $\det L$ bez modułu. Przykładowo, przekształcenie $M: U \rightarrow U$ ma dobrze zdefiniowany wyznacznik $\det M = \det[M]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}$ (niezależny od wyboru orientacji U , gdyż przyjmujemy tę samą bazę dwa razy).

Zadanie 7.2. Funkcje

$$\begin{aligned} f, g: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ f(\alpha, \beta) &= (\cos \beta, \sin \beta, \sin \alpha), \\ g(\alpha, \beta) &= (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha) \end{aligned}$$

parametryzują odpowiednio walec $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$ oraz sferę \mathbb{S}^2 z wyjątkami biegunami $(0, 0, \pm 1)$.

- (a) Wyznaczyć obrazy wektorów bazy standardowej przy przekształceniu Df (czyli $\partial_{\alpha} f$ oraz $\partial_{\beta} f$), wybrać dogodną bazę $T_f C$ i obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Df}|$.
- (b) W podobny sposób obliczyć wyznacznik $|\det \overline{Dg}|$.

- (c) Podać interpretację geometryczną przekształcenia $g \circ f^{-1}: C \rightarrow \mathbb{S}^2$. Uzasadnić, że przekształcenie liniowe

$$Dg \circ Df^{-1}: T_p C \rightarrow T_q \mathbb{S}^2$$

ma wyznacznik (w module) równy 1.

- (d) Obliczyć bezpośrednio pierwiastki z wyznaczników Grama $\sqrt{\det(Df^\top Df)}$, $\sqrt{\det(Dg^\top Dg)}$ i porównać z wynikami uzyskanymi w punktach a) i b).

Wynioskować, że pole czaszy sfery zakreślonej cyrklem o rozwartości r ($0 < r < 2$) wynosi πr^2 .

Zadanie 7.3. Korzystając z wybranej przez siebie charakteryzacji, wyprowadzić wzory:

- (a) $|\det \overline{D\varphi}| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, gdy $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$;
 (b) $|\det \overline{D\varphi}| = |\varphi'|$, gdy $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

8 Miara powierzchniowa

Zadanie 8.1. Obliczyć długość krzywej zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{dla } t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 8.2. Obliczyć miarę powierzchni zadanej poprzez parametryzację

$$\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t, t) \quad \text{dla } r \in (0, 1), t \in (0, 2\pi).$$

Zadanie 8.3. Znaleźć parametryzację krzywej opisanej równaniem

$$(x^2 + y^2) = x^2 - y^2,$$

a następnie wyznaczyć jej długość na tyle jawnie, na ile się uda.

Zadanie 8.4. Obliczyć całkę

$$\int_C x^2 \, dl_C,$$

jeśli C to krzywa powstała w wyniku przecięcia sfery jednostkowej (o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) z płaszczyzną $x + y + z = 1$.

Zadanie 8.5. Wyznaczyć miarę powierzchni M z Zadania 6.4.

Zadanie 8.6. Wykazać szczególny przypadek twierdzenia o całkowaniu po włóknach:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} f(x) \, dl_{\partial B_r}(x) \, dr$$

dla odpowiednio regularnych funkcji f .

Uwaga. Równość zachodzi dla wszystkich $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ale na potrzeby rozwiązania można np. założyć ciągłość.

Zadanie 8.7. Wykazać, że średnia odległość punktów n -wymiarowej o promieniu R do środka tej kuli wynosi $\frac{n}{n+1}R$.

Zadanie 8.8. Obliczyć pole powierzchni paraboloidy

$$M = \{(x, y, x^2 + y^2) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Zadanie 8.9. Wyprowadzić wzór na miarę wykresu funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ jest wykresem f na zbiorze U , czyli zbiorem $\{(x, f(x)) : x \in U\}$, to

$$l(M) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx.$$

Zadanie 8.10. (reguła Pappusa-Guldina) Wykazać, że miara powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej Γ wynosi 2π razy całka po Γ z odległości do osi obrotu. Lub inaczej: $2\pi r \cdot l(\Gamma)$, gdzie r jest odległością środka ciężkości Γ od osi obrotu.

Zadanie 8.11. Wyznaczyć wzór pole powierzchni bocznej walca i stożka (o wysokości h i promieniu r) na dwa sposoby:

- (a) w oparciu o regułę Pappusa-Guldina;
- (b) przez wskazanie izometrycznej figury płaskiej w \mathbb{R}^2 (chodzi o to, żeby różniczka parametryzacji była włożeniem izometrycznym).

Zadanie 8.12. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie rozmaitością jednowymiarową, $f: M \rightarrow (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą, a $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiorem zadany przez

$$S = \{(x, y, t) : (x, y) \in M, 0 < t < f(x, y)\}.$$

Uzasadnić, że S jest rozmaitością 2-wymiarową oraz że

$$l(S) = \int_M f(x, y) dl_M(x, y).$$

Zadanie 8.13. Dane są rozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^M$ (m -wymiarowa) i $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^N$ (n -wymiarowa). Wykazać, że zbiór

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{M+N} : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}\}$$

jest rozmaitością $m+n$ -wymiarową. Dla odpowiednio regularnych funkcji $f: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór

$$\int_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}} f(x, y) dl_{\mathcal{M} \times \mathcal{N}}(x, y) = \int_{\mathcal{N}} \int_{\mathcal{M}} f(x, y) dl_{\mathcal{M}}(x) dl_{\mathcal{N}}(y).$$

Zadanie 8.14. ★ (twierdzenie o całkowaniu po włóknach) Załóżmy, że $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 na $U \subseteq \mathbb{R}^n$, a jej gradient nie zeruje się na zbiorze zwartym $K \subseteq U$. Dla odpowiednio regularnych funkcji f wyprowadzić wzór

$$\int_K f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{K \cap H^{-1}(t)} \frac{f(x)}{|\nabla H(x)|} \, dl_{H^{-1}(t)} \, dt.$$

Wskazówka. Można skorzystać z następującej wersji TFU: dla dowolnego punktu istnieje dyfeomorfizm otoczenia Φ spełniający tożsamość $H(\Phi(t, u)) = t$.

9 O formach różniczkowych

Czego się spodziewać. Kurs analizy matematycznej można prawie uznać za zakończony. Ostatnim prawdziwie analitycznym twierdzeniem, jakie poznamy, jest uogólnienie tzw. podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego (czyli $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$) na wyższe wymiary. Jest to *twierdzenie Stokesa* [Tw. 7.53]¹, stwierdzające równość $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$. Zamiast niego nieco łatwiej jest przedstawić równoważne mu (z dokładnością do pewnych technicznych szczegółów) *twierdzenie o dywergencji* [Lem. 7.55]:

$$\int_M \operatorname{div}_M F(x) dl_M(x) = \int_{\partial M} F(x) \cdot \vec{n}(x) dl_{\partial M}(x).$$

Tutaj $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwartą m -wymiarową podzbiornością z brzegiem, $\operatorname{div}_M F(x)$ to dywergencja zdefiniowana jako suma $\sum_{j=1}^m \langle \nabla_{e_j} F(x), e_j \rangle$, gdzie e_1, \dots, e_m jest wybraną bazą o.n. $T_x M$. Natomiast $\vec{n}(x)$ to wektor normalny zewnętrzny (styczny do M , ortogonalny do ∂M).

Pozostała część materiału, jaki nam pozostał, to przede wszystkim algebra wieloliniowa. Ta okoliczność ma oczywiście szereg zalet i wad, znanych wszystkim z kursu geometrii z algebrą liniową.

Dotychczasowe spotkania z formami. Dla funkcji $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ różniczka jest funkcją $Df: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liniową względem swojego drugiego argumentu. Można też na nią patrzeć jako na funkcję $Df: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ określoną na Ω , ale za to przyjmującą wartości w przestrzeni liniowej $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. I to jest właśnie definicja 1-formy (warto zaznaczyć, że nie każda 1-forma jest postaci Df dla pewnego f).

Przypomnijmy też, że definicja drugiej różniczki wykorzystuje ten drugi sposób patrzenia na Df [rozdz. 2.5.2]. Otóż różniczka Df to funkcja $D^2f: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. Pojawiającą się tutaj przestrzeń $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ możemy utożsamić z przestrzenią $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ funkcji 2-liniowych. Okazuje się potem, że $D^2f(x)$ jest przekształceniem nie byle jakim, bo *symetrycznym*, 2-formy definiujemy natomiast jako funkcje o wartościach w przekształceniach *antysymetrycznych*. Jak się okaże, ten kontrast odgrywa istotną rolę.

Czołowym przykładem przekształcenia wieloliniowego antisymetrycznego jest wyznacznik. Jeśli wyznacznik rozumiemy jako funkcję określoną nie tyle na macierzach $n \times n$, co na n -tkach wektorów w \mathbb{R}^n , to jest to antisymetryczne przekształcenie $\det \in L(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, które na dowolnej dodatnio zorientowanej bazie ortonormalnej przyjmuje wartość 1 (jak łatwo zauważyć, orientacja jest tu istotna).

Warto przypomnieć, że orientacja może odgrywać rolę przy całkowaniu. O ile całka Lebesgue'a $\int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1(x)$ bierze pod uwagę jedynie odcinek $[a, b]$ jako przestrzeń

¹Odnosi się do skryptu Pawła Strzeleckiego z Analizy Matematycznej II

z miarą, to całka Newtona czy Riemanna $\int_a^b f(x) dx$ jest już czuła na wybór orientacji. Według popularnej konwencji mamy $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$, a więc zmiana kolejności a, b zmienia znak całki.

Co zyskujemy? Zyskujemy przede wszystkim zgrabny algebraiczny język, który (po wstępnym oswojeniu) pozwala ujmować wiele problemów w sposób zwięzły, pozwalający na ogólne i geometryczne ujęcie, a jednocześnie ułatwiający konkretne rachunki. Zainteresowanym polecam lekturę eseju Terence'a Tao na ten temat², a tutaj podam kilka przykładów:

- Pojęcia gradientu (grad / ∇), dywergencji (div), rotacji (rot / curl) wszystkie da się ująć jako szczególne przypadki operatora różniczki zewnętrznej: $\omega \mapsto d\omega$.
- Znane z fizyki pojęcia pracy siły wzdłuż krzywej oraz strumienia pola przez powierzchnię są szczególnymi przypadkami całkowania formy różniczkowej: $\int_M \omega$.
- Całkowanie przez podstawienie w klasycznej postaci to wzór

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi| dx = \int_V f(y) dy \quad (\text{gdzie } \Phi: U \rightarrow V),$$

a w języku form różniczkowych przyjmuje postać $\int_U \Phi^* \omega = \int_V \omega$. Forma ω niejako zawiera w sobie zarówno informację o funkcji podcałkowej f , jak i o mierze, względem której całkujemy.

- Wiele własności można sformułować w zwięzły sposób, co ułatwia operowanie pojęciami. Przykładowo:

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta), \quad d(f^*\omega) = f^*(d\omega), \quad d(d\omega) = 0,$$

oraz wspomniane wcześniej równości $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, $\int_U \Phi^* \omega = \int_V \omega$.

- (dla osób zainteresowanych geometrią różniczkową) Operowanie na formach różniczkowych (całkowanie, różniczkowanie...) jest możliwe na abstrakcyjnych *rozmaitościach gładkich* w odróżnieniu od pojęć typu dywergencja, które wymagają tzw. *metryki Riemannowskiej* na rozpatrywanej rozmaitości.

²Terence Tao, [Differential forms and integration](#)

10 Formy różniczkowe – wstęp

Na początek będziemy 1-formy traktować jako *formalne napisy*

$$\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n,$$

i całkować po krzywej Γ (parametryzowanej przez $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$) zgodnie ze wzorem

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + f_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)) dt.$$

Dla 1-form w dwóch wymiarach twierdzenie Greena mówi wówczas, że (przy stosownych założeniach)

$$\int_{\partial\Omega} f dx + g dy = \int_{\Omega} (-\partial_y f + \partial_x g) d\lambda_2$$

Zadanie 10.1. Praca wykonana przez siłę $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ jest zdefiniowana jako całka

$$\int_{\Gamma} F(p) \cdot \vec{T}(p) dl(p),$$

w której $\vec{T}(p)$ jest jednostkowym wektorem stycznym do Γ (wskazującym zgodnie z orientacją). Załóżmy teraz, że siła F jest potencjalna, to znaczy $F(p) = \nabla E(p)$ dla pewnej funkcji skalarnej E . Wykazać, że wówczas praca F wzdłuż dowolnej zamkniętej krzywej jest zerowa.

Zadanie 10.2. Sprawdzić, że pole grawitacyjne $F(x) = -\frac{x}{|x|^3}$ jest potencjalne. Wykazać, że potencjalne jest również każde inne pole centralne, czyli zadane wzorem $F(x) = f(|x|x)$.

Zadanie 10.3. Przekonać się, że całka z 1-formy $\int_{\Gamma} \omega$ pokrywa się z całką

$$\int_{\Gamma} \omega(p)(\vec{T}(p)) dl(p),$$

gdzie $\vec{T}(p)$ jest jednostkowym dodatnio zorientowanym wektorem stycznym.

Zadanie 10.4. Obliczyć całkę z 1-formy $\omega = \frac{xdx+yd dy}{x^2+y^2}$ po (dodatnio zorientowanym) okręgu jednostkowym.

Zadanie 10.5. Obliczyć całkę z formy $\frac{y^2 dx - 2xy dy}{x^2 + y^4}$ wzdłuż półokręgu $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, o początku $(1, 0)$ i końcu $(-1, 0)$.

Zadanie 10.6. Wykazać, że jeśli Ω jest ograniczonym obszarem klasy C^1 , to

$$\int_{\partial\Omega} x dy = - \int_{\partial\Omega} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x dy - y dx = \lambda_2(\Omega).$$

Zadanie 10.7. Sprawdzić, że forma $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ zapisana w postaci $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ spełnia $-\partial_y f + \partial_x g = 0$ w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wykazać, że nie istnieje forma $\eta = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ spełniająca ten warunek w \mathbb{R}^2 i różniąca się od ω jedynie na pewnym otoczeniu zera.

Zadanie 10.8. Czy forma $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ z poprzedniego zadania daje się zapisać w postaci $\partial_x h(x, y)dx + \partial_y h(x, y)dy$ dla pewnej funkcji $h: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$? Czy jest to możliwe na mniejszym zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$?

Zadanie 10.9. Załóżmy, że forma $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ klasy C^1 jest określona na kuli jednostkowej i spełnia warunek $\partial_y f = \partial_x g$. Wykazać, że $\omega = \partial_x h(x, y)dx + \partial_y h(x, y)dy$ dla funkcji h określonej wzorem

$$h(x, y) = \int_{[x, y]} \omega = \int_0^1 f(tx, ty)x + g(tx, ty)y dt.$$

Wskazówka. Przedstawić $\partial_x h$ w postaci $\int_0^1 \partial_t(f(tx, ty)t) dt$.

Uwaga. Na wykładzie poznamy dużo bardziej ogólny Lemat Poincaré'go, zgodnie z którym na obszarze gwiaździstym każda forma zamknięta jest dokładna (sens tych słów poznamy w odpowiednim czasie).

Zadanie 10.10. Dany jest ograniczony wypukły obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ klasy C^1 zawierający punkt 0 , wraz z parametryzacją brzegu $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial\Omega$ zgodną z orientacją.

- Wyprowadzić wzór na prędkość polową, czyli prędkość zmiany pola zakresłonego przez promień wodzący (tj. odcinek łączący 0 z $\gamma(t)$): $\frac{1}{2} \det(\gamma, \dot{\gamma})$.
- Wyprowadzić drugie prawo Keplera: jeśli wektor przyspieszenia $\ddot{\gamma}(t)$ jest zawsze proporcjonalny do promienia wodzącego $\gamma(t)$, to prędkość polowa jest stała.
- Wyprowadzić wzór na pole z Zadania 10.6: $\lambda_2(\Omega) = \frac{1}{2} \int x dy - y dx$.

Wskazówka. W (a) można wykorzystać parametryzację $\varphi(s, t) = s\gamma(t)$. Warto też rozważyć pole małego trójkąta o wierzchołkach 0 , $\gamma(t)$, $\gamma(t + \Delta t)$.

Zadanie 10.11. Dla ograniczonego obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ klasy C^1 oraz pola wektorowego $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ wyprowadzić twierdzenie o dywergencji

$$\int_{\partial\Omega} F(p) \cdot \vec{n}(p) \, dl(p) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) \, dx.$$

Tutaj $\operatorname{div} F = \partial_1 F^1 + \partial_2 F^2$ to dywergencja, a $\vec{n}(p)$ to jednostkowy wektor prostopadły do $\partial\Omega$, skierowany na zewnątrz.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 10.3.

Zadanie 10.12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

$$\gamma(t) = (a \cos^3(t), b \sin^3(t)) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

dla danego $a > 0$.

Zadanie 10.13. ★ (wstęp do Funkcji Analitycznych) Niech $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją zespoloną, przedstawioną jako kombinacja $f = u + iv$ funkcji rzeczywistych. Zdefiniujemy całkę zespoloną po krzywej $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ wzorem

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &:= \int_{\Gamma} (u(z) + iv(z))(dx + idy) \\ &= \int_{\Gamma} u(z) dx - v(z) dy + i \int_{\Gamma} u(z) dy + v(z) dx. \end{aligned}$$

(a) Przekonać się, dla jeśli $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jest ograniczonym obszarem klasy C^1 oraz $f \in C^1$, to

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \int_{\Omega} (-\partial_y u - \partial_x v) + i(\partial_x u - \partial_y v) \, d\lambda_2.$$

(b) Sprawdzić, że pochodna zespolona $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ (w której h jest parametrem zespolonym) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w z (w zwyczajnym sensie) oraz spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna:

$$\partial_x u(z) = \partial_y v(z), \quad \partial_y u(z) = -\partial_x v(z).$$

(c) Wywnioskować, że jeśli f jest wszędzie różniczkowalna w sensie zespolonym oraz $f \in C^1$, to całka zespolona $\int_{\Gamma} f(z) dz$ po dowolnej krzywej zamkniętej $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ jest zerowa.

11 O formach różniczkowych – dygresja algebraiczna

O co chodzi? Do opisu form różniczkowych można użyć bardziej algebraicznego języka. Pozwala to zauważyć, że w przyjętych definicjach nie ma nic arbitralnego (zależności od wyboru bazy etc.). Oczywiście ceną jest większa abstrakcja.

Na potrzeby niniejszej dygresji będziemy rozważać skończone wymiarowe przestrzenie nad \mathbb{R} , choć oczywiście można przyjąć większą ogólność. Przekształcenia k -liniowe antysymetryczne (niekoniecznie o wartościach w \mathbb{R}) będziemy nazywać przekształceniami k -alternującymi. Użyjemy oznaczenia $\text{Hom}(U, V)$ na przestrzeń przekształceń liniowych $U \rightarrow V$ oraz $\text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, V)$ na przestrzeń przekształceń k -alternujących $U^k \rightarrow V$. Jako dalszą lekturę polecam *Algebra: Chapter 0* P. Aluffiego, zwłaszcza rozdziały 2 i 4 w części VIII.

Potęga zewnętrzna. Dla przestrzeni U oraz liczby $k \geq 0$ definiujemy potęgę zewnętrzną $\Lambda^k U$ jako przestrzeń liniową wraz z przekształceniem k -alternującym $U^k \xrightarrow{\wedge} \Lambda^k U$ o następującej własności uniwersalnej: jeśli $T: U^k \rightarrow V$ jest przekształceniem k -alternującym, to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\bar{T}: \Lambda^k U \rightarrow V$ spełniające równość $T = \bar{T} \circ \wedge$, czyli

$$T(u_1, \dots, u_k) = \bar{T}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) \text{ dla } u_1, \dots, u_k \in U.$$

$$\begin{array}{ccc} U^k & \xrightarrow{T} & V \\ \wedge \downarrow & \nearrow \exists! \bar{T} & \\ \Lambda^k U & & \end{array}$$

Obraz k -tki (u_1, \dots, u_k) przy przekształceniu \wedge oznaczamy tu przez $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$.

Jest to *definicja*, ale nie *konstrukcja*. Można z niej łatwo wywnioskować, że istnieje tylko jedna taka para w tym sensie, że jeśli są dwie $U^k \xrightarrow{\wedge_i} \Lambda_i^k U$ ($i = 1, 2$), to istnieją izomorfizmy liniowe $\Lambda_i^k U \xrightarrow{f_{ij}} \Lambda_j^k U$ spełniające $f_{ij} \circ \wedge_i = \wedge_j$. Dlatego będziemy uważali potęgę zewnętrzną za obiekt jednoznacznie wyznaczony.

Nie jest natomiast oczywiste, czy taka para istnieje. Można się jednak przekonać, że jeśli wybierzemy bazę e_1, \dots, e_n przestrzeni U , to za $\Lambda^k U$ można przyjąć dowolną przestrzeń $\binom{n}{k}$ -wymiarową W wraz z przekształceniem k -alternującym $U^k \rightarrow W$, dla którego obrazy k -tek $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$) stanowią bazę W .

Przekształcenia alternujące Jest jasne, że każdemu elementowi $S \in \text{Hom}(\Lambda^k U, V)$ (czyli przekształceniu liniowemu) można przyporządkować element $T \in \text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, V)$ (czyli przekształcenie alternujące) wzorem $T := S \circ \wedge$. Takie przyporządkowanie oczywiście jest liniowe. Definicja potęgi zewnętrznej stwierdza, że jest to bijekcja, określiliśmy więc izomorfizm liniowy

$$\text{Hom}(\Lambda^k U, V) \cong \text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, V). \quad (\star)$$

Oznacza to, że przekształcenia alternujące z U^k można reprezentować jako przekształcenia *liniowe* z $\Lambda^k U$.

Iloczyn zewnętrzny. Rozważmy teraz przekształcenie Ψ zadane jako przekształcenie $\wedge \in \text{Hom}_{k+l}^{\text{alt}}(U, \Lambda^{k+l}U)$ z *opóźnioną ewaluacją*:

$$\Psi \in \text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, \text{Hom}_l^{\text{alt}}(U, \Lambda^{k+l}U)),$$

$$\Psi(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}, \dots, u_{k+l}) := u_1 \wedge \dots \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_{k+l}.$$

Stosując izomorfizm (\star) dwukrotnie, otrzymujemy stąd element

$$\bar{\Psi} \in \text{Hom}(\Lambda^k U, \text{Hom}(\Lambda^l U, \Lambda^{k+l}U)).$$

Z powrotem dokonując wcześniejszej ewaluacji, określamy przekształcenie dwuliniowe

$$\Lambda^k U \times \Lambda^l U \rightarrow \Lambda^{k+l}U;$$

jest to właśnie iloczyn zewnętrzny oznaczany znowu symbolem \wedge . Innymi słowy, dla dwóch elementów $\alpha \in \Lambda^k U$, $\beta \in \Lambda^l U$ określiliśmy element $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}U$. Jego definicję można streścić następująco: jest to jedyne przekształcenie dwuliniowe, dla którego zachodzi tożsamość

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) \wedge (u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_{k+l}) = u_1 \wedge \dots \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_{k+l}$$

Porównanie z pojęciami z zajęć. Główna różnica między pojęciami przedstawionymi tutaj a tymi na zajęciach jest następująca: otóż na potrzeby zajęć przyjmujemy, że $\Lambda^k U^*$ jest przestrzenią przekształceń k -alternujących $U^k \rightarrow \mathbb{R}$, czyli przestrzenią $\text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, \mathbb{R})$ (oczywiście stosujemy to w przypadku $U = \mathbb{R}^n$). Wskażemy teraz izomorfizm między tymi przestrzeniami.

W tym celu określimy przekształcenie

$$\Phi \in \text{Hom}_k^{\text{alt}}(U^*, \text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, \mathbb{R})), \quad \Phi(u_1^*, \dots, u_k^*)(u_1, \dots, u_k) := \det(\langle u_i^*, u_j \rangle)_{ij}.$$

Jako argument przyjmuje ono k elementów U^* i zwraca przekształcenie k -alternujące $U^k \rightarrow \mathbb{R}$ zadane powyższym wzorem (dla zadanej k -tki elementów U jest to wyznacznik macierzy $k \times k$ złożonej z ewaluacji elementów U^* na elementach U).

Zgodnie z definicją mamy teraz indukowane przekształcenie liniowe

$$\Lambda^k U^* \xrightarrow{\bar{\Phi}} \text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, \mathbb{R})$$

i można sprawdzić, że jest to izomorfizm. Skądinąd przekonaliśmy się wcześniej, że $\text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, \mathbb{R})$ jest izomorficzne z $\text{Hom}(\Lambda^k U, \mathbb{R})$, a to z kolei jest tożsame z $(\Lambda^k U)^*$ na mocy definicji, więc otrzymany izomorfizm można podsumować w postaci

$$(\Lambda^k U)^* \cong \Lambda^k U^*.$$

Łatwo się też przekonać, że $\bar{\Phi}$ jest tym samym utożsamieniem, którego użyliśmy na zajęciach. Otóż jeśli e_1, \dots, e_n jest wybraną bazą U , a dx_1, \dots, dx_n jest bazą dualną, to przekształcenie k -alternujące odpowiadające $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ jest dane wzorem

$$\bar{\Phi}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})(u_1, \dots, u_k) = \det(\langle dx_{i_s}, u_j \rangle)_{sj} = \det(u_j^{i_s})_{sj},$$

a więc jest dokładnie wyznacznikiem z macierzy, która ma w kolumnach wektory u_1, \dots, u_k , ale w której wybrano jedynie wiersze odpowiadające indeksom i_1, \dots, i_k . Inaczej mówiąc, jest to jedyny element $\text{Hom}_k^{\text{alt}}(U, \mathbb{R})$, który przyjmuje wartość 1 na k -tce $(e_{i_1}, \dots, e^{i_k})$ (przy założeniu, że i_j się nie powtarzają) oraz wartość 0 na wszystkich istotnie różnych k -tkach tej postaci.

12 Formy różniczkowe – algebra wieloliniowa

Definicje. Oznaczamy

$$\begin{aligned}\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* &:= \{\omega: (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R} \quad k\text{-liniowe antysymetryczne}\}, \\ \Omega^k(V) &:= \{\omega: V \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \quad \text{gładkie}\} \quad (k\text{-formy na } V \subseteq \mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Bazą przestrzeni $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ są elementy $dx_I(v_1, \dots, v_k) = \det(v_j^{i_s})_{s,j}$ wyznaczone przez k -elementowe zbiory indeksów $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ (brane w kolejności rosnącej). Iloczyn zewnętrzny \wedge jest działaniem łącznym, a w przypadku 1-form antysymetrycznym, i spełnia $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = dx_I$ (przy oznaczeniach j.w.).

Różniczka zewnętrzna spełnia tożsamość

$$d\left(\sum_I f_I dx_I\right) = \sum_I df_I \wedge dx_I, \text{ gdzie } df = \partial_1 f dx_1 + \dots + \partial_n f dx_n \text{ jest różniczką } f.$$

Przeciągnięcie k -formy różniczkowej za pomocą funkcji $g = (g_1, \dots, g_n)$ to

$$g^*\left(\sum_I f_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) = \sum_I f_I \circ g dg_{i_1} \wedge \dots \wedge dg_{i_k}.$$

Zadanie 12.1. Niech $\eta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie iloczynem wektorowym: $\eta(u, v) = u \times v$.

- Wykazać, że $\eta = (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)$.
- Niech $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie gładkim polem wektorowym oraz $\eta_F(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$. Wyrazić η_F w bazie $dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz$.

Zadanie 12.2. Obliczyć iloczyny zewnętrzne

- $(xdy + ydz + zdx) \wedge (dx + dy + dz)$
- $(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \wedge (dx + dy + dz)$

Zadanie 12.3. Obliczyć $\omega \wedge \omega$, jeśli $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

Uwaga. Ten przykład pokazuje, że $\omega \wedge \omega$ wcale nie musi być zerem.

Zadanie 12.4. Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ będzie formą z poprzedniego zadania. Wykazać, że każdą formę $\beta \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)^*$ da się zapisać w postaci $\alpha \wedge \omega$ dla dokładnie jednej formy $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4)^*$.

Uwaga. Jest to szczególny przypadek Zadania 12.10.

Zadanie 12.5. Obliczyć:

(a) $xd(\sin(x^2y)) + yd(\cos(xy^2))$

(b) $e^{-x-y+z}d(e^{x+y+z})$

(c) $d(x_1x_3 dx_3 \wedge dx_4)$

(d) $d\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)$

Zadanie 12.6. Obliczyć przeciągnięcie elementu $dy_2 \wedge dy_1 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ za pomocą przekształcenia liniowego $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadanego macierzą (w bazie standardowej)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 12.7. Obliczyć przeciągnięcie formy $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ za pomocą odwzorowania $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$.

Zadanie 12.8. Obliczyć przeciągnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania $\Phi(u, v) = (uv, u^2, 3u + v)$. Czy wynik jest zaskakujący?

Zadanie 12.9. Obliczyć cofnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania

$$\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \beta)$$

(czyli dyfeomorfizmu sferycznego).

Zadanie 12.10. ★ (szczególny przypadek lematu Lefschetza) Niech $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^*$ będzie formą

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Wykazać, że

$$\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^{2n})^* \ni \eta \longmapsto \eta \wedge \omega \in \Lambda^{n+1}(\mathbb{R}^{2n})^*$$

jest izomorfizmem liniowym.

13 Formy różniczkowe – całkowanie

Co trzeba wiedzieć:

(a) Całkę z n -formy po otwartym obszarze $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definiuje się wzorem

$$\int_U f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_U f d\lambda_n.$$

(b) Całka z k -formy ω po k -wymiarowej rozmaitości M spełnia

$$\int_{\Phi(N)} \omega = \int_N \Phi^* \omega$$

dla dowolnego gładkiego przekształcenia $\Phi: N \rightarrow M$
(w szczególności może to być parametryzacja).

Zadanie 13.1. Przekonać się, że całka z k -formy ω po k -wymiarowej podrozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^n$ spełnia równość

$$\int_M \omega = \int_M \omega_x(v_1(x), \dots, v_k(x)) dl_M(x),$$

gdzie funkcje $v_1, \dots, v_n: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ w każdym punkcie $x \in M$ zadają dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną $T_x M$ (należy dopuścić, że są one jedynie kawałkami ciągłe).

Uwaga. Zadanie to stanowi ogólnienie Zadania 10.3 i pokazuje, że całkę z formy można zdefiniować w sposób nieopierający się na wyborze parametryzacji.

Zadanie 13.2. (forma objętości) Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie $(n - 1)$ -wymiarową podrozmaitością zorientowaną i oznaczymy przez \vec{n} dodatnio zorientowane pole normalne na M (dowolnie przedłużone na \mathbb{R}^n , jeśli jest taka potrzeba). Niech $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ będzie formą określoną wzorem

$$\omega_x(v_1, \dots, v_{n-1}) := \det(\vec{n}(x), v_1, \dots, v_{n-1}) \quad \text{dla } x \in M, v_1, \dots, v_{n-1} \in T_x M.$$

Przekonać się, że dla dowolnej (odpowiednio regularnej) funkcji f zachodzi

$$\int_M f \omega = \int_M f(x) dl_M(x).$$

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 13.1.

Uwaga. Warunek dodatniej orientacji oznacza, że każdego $x \in M$ zachodzi $\vec{n}(x) \in T_x^\perp M$, $|\vec{n}(x)| = 1$, a jeśli v_1, \dots, v_{n-1} jest dodatnio zorientowaną bazą $T_x M$, to $\vec{n}(x), v_1, \dots, v_{n-1}$ jest dodatnio zorientowaną bazą \mathbb{R}^n .

Zadanie 13.3. Obliczyć całkę z formy $\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ po dodatnio zorientowanej sferze jednostkowej \mathbb{S}^2 . Czy forma ta jest zamknięta? Czy jest dokładna?

Zadanie 13.4. Dana jest 2-forma ω oraz powierzchnia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadane wzorami

$$\omega = -2xdy \wedge dz + 2dz \wedge dx + zdx \wedge dy, \quad S = \{y = x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 2\},$$

przy czym orientację S przyjmujemy w taki sposób, by wektor $\vec{n} = (x, 0, z)$ był „zewnątrzny”. Wyznaczyć całkę $\int_S \omega$:

- (a) bezpośrednio, przy użyciu wybranej parametryzacji S ;
- (b) stosując twierdzenia Stokesa dla obszaru $\Omega = \{y \geq x^2 + z^2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Zadanie 13.5. Dana jest półsfera $S^+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ oraz pole wektorowe $F(x, y, z) = (x + z, x - y, 0)$.

- (a) Obliczyć $\int_{S^+} F \cdot \vec{n}$.
- (b) Obliczyć $\int_{S^+} \omega$ dla formy $\omega = i_F(dx \wedge dy \wedge dz)$, czyli formy zadanej wzorem $\omega_p(v_1, v_2) = (dx \wedge dy \wedge dz)(F(p), v_1, v_2)$.

Zadanie 13.6. (prawo Archimedesesa) Ciało A jest zanurzone w cieczy, której powierzchnia pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$. Ciśnienie w punkcie (x, y, z) jest proporcjonalne do głębokości, a więc wynosi $-cz$. W konsekwencji łączna siła wyporu działająca na ciało A to

$$\vec{F} = \int_{\partial A} (-cz) \cdot (-\vec{n}(x, y, z)) dl_{\partial A}(x, y, z)$$

(siła jest skierowana do wewnątrz A , stąd minus przy $\vec{n}(x, y, z)$). Wykazać, że $\vec{F} = (0, 0, c|A|)$.

Zadanie 13.7. Dowieść, że $dd\omega = 0$ dla dowolnej 1-formy $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, na dwa sposoby:

- (a) przez bezpośredni rachunek;
- (b) jako wniosek z obserwacji, że $\partial\partial\Omega = 0$ dla dowolnego gładkiego obszaru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Zadanie 13.8. (twierdzenie Brouwera o retrakcji) Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ będzie 2-formą o niezerowej całce $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$ (np. formą objętości z Zadania 13.2). Przypuśćmy, że istnieje gładka funkcja $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ spełniająca $u(x) = x$ dla $x \in \mathbb{S}^2$.

- (a) Uzasadnić, że $\int_{\mathbb{S}^2} u^* \omega \neq 0$.
- (b) Uzasadnić, że $d(u^* \omega) = 0$.
- (c) Wywnioskować sprzeczność z założeniem istnienia u i wyprowadzić stąd klasyczne twierdzenie Brouwera.

14 Praca domowa – formy różniczkowe

Zasady rozwiązywania. Poniższe zadania należy samodzielnie rozwiązać, a rozwiązania oddać na piśmie podczas zajęć. W przypadku nieobecności na zajęciach rozwiązania należy zredagować elektronicznie i przesłać e-mailem. Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać podczas zajęć w **czwartek 15 czerwca** (czyli do 13.45). W przypadku przesłania rozwiązań e-mailem obowiązuje termin do rozpoczęcia zajęć (czyli do 12.15).

Zadanie 14.1. (10p) Obliczyć cofnięcie formy $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ za pomocą odwzorowania

$$\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \alpha \cos \beta, r \sin \alpha \cos \beta, r \sin \beta)$$

(czyli dyfeomorfizmu sferycznego).

Zadanie 14.2. (10p) Na \mathbb{R}^6 przyjmijmy współrzędne $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ i rozważmy 2-formę $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^6)^*$ daną wzorem

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3.$$

Wykazać, że przekształcenie

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^6)^* \ni \eta \longmapsto \eta \wedge \omega \wedge \omega \in \Lambda^5(\mathbb{R}^6)^*$$

jest izomorfizmem liniowym.

Zadanie 14.3. (10p) Obliczyć całkę

$$\int_D (x^2 + y)dx + (x - y)dy,$$

gdzie D to łuk paraboli $x = y^2$ zorientowany od punktu $(1, 1)$ do $(1, -1)$.

Zadanie 14.4. Na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dana jest 1-forma

$$\omega = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

- (a) (5p) Przekonać się, że jest to forma zamknięta, czyli $d\omega = 0$.
- (b) (5p) Wykazać, że jest to forma dokładna, czyli istnieje funkcja $h: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca $dh = \omega$.

Wskazówka. Funkcję h da się zgadnąć. Można też wykorzystać odpowiednią wersję Zadania 10.9 i wykazać istnienie takiej funkcji bez wyznaczania jej jawnym wzorem.